# Teoria Miary i Całki

Bartosz Kwaśniewski

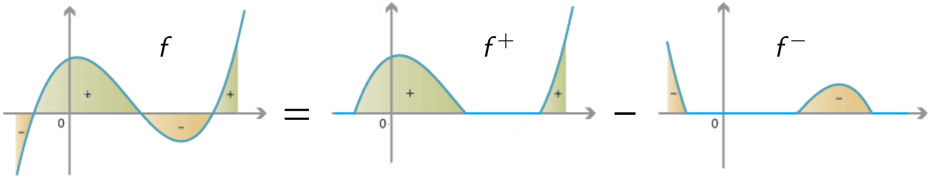
Wykład 10

## Całka z dowolnej funkcji mierzalnej

| krok | funkcja | wzór |
|---|---|---|
| (1) | $f = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbb{1}_{A_i}$ prosta | $\int_X f\, d\mu := \sum_{i=1}^{n} y_i \mu(A_i)$ |
| (2) | $f \geqslant 0$ nieujemna mierzalna | $\int_X f\, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu$ <br> gdzie $f_n \nearrow f$ funkcje proste |
| (3) | $f$ dowolna mierzalna | $\int_X f\, d\mu := \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu$ <br> gdzie $f = f^+ - f^-$ oraz $f^+, f^- \geqslant 0$ |

$f^+, f^-$ część dodatnia, ujemna funkcji $f$

Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ przestrzeń z miarą. Jeśli $f : X \to \mathbb{R}$ mierzalna, to $f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) := -\min\{f(x), 0\}$ mierzalne (Wykład 8)




$$f = f^+ - f^-, \qquad f^+, f^- \geqslant 0, \qquad f^+ \cdot f^- = 0.$$

**Def.** Funkcja mierzalna $f : X \to \mathbb{R}$ jest $\mu$-**całkowalna** jeżeli $\int_X f^+ \, d\mu < \infty$ oraz $\int_X f^- \, d\mu < \infty$. Wtedy

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu$$

nazywamy **całką Lebesgue'a z funkcji** $f$ **względem miary** $\mu$.

$\mathcal{L}(\mu) := \{f \in \mathcal{M}(f) : \int_X f^{\pm} \, d\mu < \infty\}$ zbiór funkcji $\mu$-całkowalnych

**Uw.** Ta definicja jest zgodna z poprzednią: $f \geqslant 0 \Longrightarrow f^+ = f$ i $f^- = 0$.

**Lem.** Następujące warunki są równoważne

1. $f \in \mathcal{L}(\mu)$
2. $f^+, f^- \in \mathcal{L}(\mu)$
3. $|f| \in \mathcal{L}(\mu)$
4. $\exists_{g \in \mathcal{L}(\mu)} \quad |f| \leqslant g$

**Dowód:** (1)$\Longrightarrow$(2) z definicji.

(2)$\Longrightarrow$(3). Zauważmy, że $|f| = f^+ + f^-$. Zatem

$$\int_X |f| \, d\mu = \int_X f^+ + f^- \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu + \int_X f^- \, d\mu < \infty$$

z addytywności całki dla funkcji nieujemnych (**Wn1** Wykład 9).

(3)$\Longrightarrow$(4). Wystarczy wziąć $g := |f|$.

(4)$\Longrightarrow$(1). Skoro $f^+, f^- \leqslant |f| \leqslant g$, to z monotoniczności całki dla funkcji nieujemnych (**Lem** Wykład 9)

$$\int_X f^+ \, d\mu, \int_X f^- \, d\mu \leqslant \int_X |f| \, d\mu \leqslant \int_X g \, d\mu < \infty \qquad \blacksquare$$

„Całkowalność w sensie Lebesgue'a jest absolutna (bezwględna)"


## Tw. (podstawowe własności całki)

Dla $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ mamy

1. $\alpha \cdot f \in \mathcal{L}(\mu)$ oraz $\int_X \alpha f \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu$ *(liniowość)*
2. $f + g \in \mathcal{L}(\mu)$ oraz $\int_X f + g \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$
3. $\max\{f, g\} \in \mathcal{L}(\mu)$, $\min\{f, g\} \in \mathcal{L}(\mu)$ *(krata)*
4. $f \leqslant g \implies \int_X f \, d\mu \leqslant \int_X g \, d\mu$ *(monotoniczność)*
5. $|\int_X f \, d\mu| \leqslant \int_X |f| \, d\mu$ *(oszacowanie modułu całki)*

**Dowód:** (1). Jeśli $\alpha \geqslant 0$, to $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ oraz $(\alpha f)^- = \alpha f^-$, skąd $(\alpha f)^+, (\alpha f)^- \in \mathcal{L}(\mu)$ na mocy **Wn1** (Wykład 9), oraz

$$\begin{aligned}\int_X \alpha f \, d\mu &\stackrel{def}{=} \int_X (\alpha f)^+ \, d\mu - \int_X (\alpha f)^- \, d\mu = \int_X \alpha f^+ \, d\mu - \int_X \alpha f^- \, d\mu \\ &\stackrel{Wn1}{=\!=} \alpha \int_X f^+ \, d\mu - \alpha \int_X f^- \, d\mu = \alpha \left( \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu \right) \\ &\stackrel{def}{=} \alpha \int_X f \, d\mu.\end{aligned}$$

Jeśli $\alpha < 0$, to $(\alpha f)^+ = (-\alpha) f^-$ oraz $(\alpha f)^- = (-\alpha) f^+$. Zatem podoobnie jak powyżej $(\alpha f)^+, (\alpha f)^- \in \mathcal{L}(\mu)$ na mocy **Wn1**, oraz

$$
\begin{aligned}
\textstyle\int_X \alpha f\, d\mu &\overset{def}{=} \textstyle\int_X (\alpha f)^+\, d\mu - \int_X (\alpha f)^-\, d\mu \\
&= \textstyle\int_X (-\alpha) f^-\, d\mu - \int_X (-\alpha) f^+\, d\mu \\
&\overset{Wn1}{=\!=} (-\alpha) \textstyle\int_X f^-\, d\mu - (-\alpha) \int_X f^+\, d\mu \\
&= \alpha \left( \textstyle\int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu \right) \overset{def}{=} \alpha \textstyle\int_X f\, d\mu.
\end{aligned}
$$

(2). Zauważmy, że jeżeli $f = f_1 - f_2$, gdzie $f_1, f_2 \geqslant 0$ całkowalne, to $|f| \leqslant f_1 + f_2 \in \mathcal{L}(\mu)$ (na mocy **Wn1**). Zatem $f \in \mathcal{L}(\mu)$. Twierdzimy, że

$$
\int_X f\, d\mu = \int_X f_1\, d\mu - \int_X f_2\, d\mu \tag{$\dagger$}
$$

Rzeczywiście, skoro $f^+ - f^- = f_1 - f_2$, to $f^+ + f_2 = f^- + f_1$ i stąd

$$
\begin{gathered}
\textstyle\int_X f^+ + f_2\, d\mu = \int_X f^- + f_1\, d\mu \overset{Wn1}{\Longleftrightarrow} \\
\textstyle\int_X f^+\, d\mu + \int_X f_2\, d\mu = \int_X f^-\, d\mu + \int_X f_1\, d\mu \Longleftrightarrow \\
\textstyle\int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu = \int_X f_1\, d\mu - \int_X f_2\, d\mu \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\dagger).
\end{gathered}
$$

Teraz zauważmy, że $f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$ jest różnicą dwóch nieujemnych funkcji całkowalnych. Zatem $f + g \in \mathcal{L}(\mu)$ oraz

$$\int_X f + g\, d\mu \overset{(\dagger)}{=} \int_X (f^+ + g^+)\, d\mu - \int_X (f^- + g^-)\, d\mu$$

$$\overset{Wn1}{=\!=} \int_X f^+\, d\mu + \int_X g^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu - \int_X g^-\, d\mu$$

$$= \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu + \int_X g^+\, d\mu - \int_X g^-\, d\mu$$

$$\overset{def}{=\!=} \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu.$$

(3). Zauważmy, że $|f| + |g| \in \mathcal{L}(\mu)$ na mocy (2) (lub **Wn1**). Zatem

$$|\max\{f, g\}| \leqslant \max\{|f|, |g|\} \leqslant |f| + |g| \overset{Lem}{\Longrightarrow} \max\{f, g\} \in \mathcal{L}(\mu),$$

$$|\min\{f, g\}| \leqslant \min\{|f|, |g|\} \leqslant |f| + |g| \overset{Lem}{\Longrightarrow} \min\{f, g\} \in \mathcal{L}(\mu).$$

(4). Jeśli $f \leqslant g$, to $g - f \geqslant 0$ i stąd

$$\int\limits_X g\, d\mu = \int\limits_X f + (g - f)\, d\mu \overset{(2)}{=} \int\limits_X f\, d\mu + \int\limits_X g - f\, d\mu \geqslant \int\limits_X f\, d\mu.$$

(5). Zauważmy, że $f, -f \leqslant |f| = \max\{f, -f\}$. Zatem

$$\left|\int_X f\, d\mu\right| = \max\{\int_X f\, d\mu, -\int_X f\, d\mu\} \overset{(1)}{=} \max\{\int_X f\, d\mu, \int_X -f\, d\mu\}$$

$$\overset{(4)}{\leqslant} \int_X |f|\, d\mu.$$

■

**Stw.** Jeśli $\mu = \sum_{i\in I} \alpha_i \mu_i$ jest kombinacją miar $\{\mu_i\}_{i\in I}$ na $(X, \mathcal{F})$, $\{\alpha_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{R}^+$, to dla funkcji mierzalnej $f : X \to \mathbb{R}$ mamy

$$f \in \mathcal{L}(\mu) \iff \sum_{i\in I} \alpha_i \int_X |f| \, d\mu_i < \infty.$$

Jeśli $f$ jest $\mu$-całkowalna, to

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i\in I} \alpha_i \int_X f \, d\mu_i \qquad \text{(szereg bezwzględnie zbieżny)}$$

**Dowód:** (1). Jeżeli $f = \sum_{k=1}^n y_k \mathbb{1}_{A_k}$ nieujemna funkcja prosta, to

$$\int_X f \, d\mu \overset{def}{=} \sum_{k=1}^n y_k \mu(A_k) = \sum_{k=1}^n y_k \sum_{i\in I} \alpha_i \mu_i(A_k) = \sum_{i\in I} \alpha_i \sum_{k=1}^n y_k \mu_i(A_k)$$

$$\overset{def}{=} \sum_{i\in I} \alpha_i \int_X f \, d\mu_i.$$

(2). Jeżeli $f \geqslant 0$, to istnieją funkcje proste $f_n \nearrow f$ oraz

$$\int_X f \, d\mu \overset{Levi}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in I} \alpha_i \int_X f_n \, d\mu_i = \sum_{i\in I} \alpha_i \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu_i$$

$$\overset{Levi}{=} \sum_{i\in I} \alpha_i \int_X f \, d\mu_i.$$

(3). Jeżeli $f : X \to \mathbb{R}$ dowolna, to $f \in \mathcal{L}(\mu) \iff \int_X |f| \, d\mu < \infty \overset{(2)}{\iff}$ $\sum_{i \in I} \alpha_i \int_X |f| \, d\mu_i < \infty$. Jeśli to zachodzi, to

$$\sum_{i \in I} \left|\alpha_i \int_X f \, d\mu_i\right| \leqslant \sum_{i \in I} \alpha_i \int_X |f| \, d\mu_i < \infty \qquad \text{(szereg absolutnie zbieżny)}$$

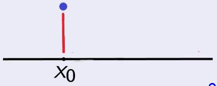
Zatem

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \alpha_i \int_X f \, d\mu_i &\overset{def}{=} \sum_{i \in I} \alpha_i \Big(\int_X f^+ \, d\mu_i - \int_X f^- \, d\mu_i\Big) \qquad \text{(bezwzględnie zbieżny)} \\ &= \sum_{i \in I} \alpha_i \int_X f^+ \, d\mu_i - \sum_{i \in I} \alpha_i \int_X f^- \, d\mu_i \\ &\overset{(2)}{=} \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu \overset{def}{=} \int_X f \, d\mu \end{aligned}$$

■

**Prz1. (Miara Diraca)** Niech $\mu = \delta_{x_0}$ miara probablistyczna skupiona w punkcie $x_0 \in X$, tzn. $\delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 1, & x_0 \in A \\ 0, & x_0 \notin A \end{cases}$ dla $A \subseteq X$. Wtedy każda funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest całkowalna oraz

$$\int_X f \, d\delta_{x_0} = f(x_0)$$



**Dowód:** (1) Jeśli $f \geqslant 0$ funkcja prosta, to $f = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbb{1}_{A_i}$, gdzie $\{y_i\}_{i=1}^n$ różne oraz $X = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$. Wtedy $x_0 \in A_{i_0}$ dla dokładnie jednego $i_0 = 1, \dots, n$ oraz $f(x_0) = y_{i_0}$. Stąd

$$\int_X f \, d\delta_{x_0} = \sum_{i=1}^{n} y_i \delta_{x_0}(A_i) = y_{i_0} = f(x_0).$$

(2) Jeśli $f \geqslant 0$ mierzalna, to istnieje ciąg nieujemnych funkcji prostych $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ taki, że $f_n \nearrow f$. Wtedy

$$\int_X f \, d\delta_{x_0} \overset{Levi}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\delta_{x_0} \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

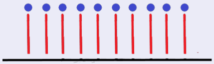
(3) Jeśli $f$ dowolna mierzalna, to $f = f^+ - f^-$, gdzie $f^+, f^- \geqslant 0$ mierzalne oraz

$$\int_X f \, d\delta_{x_0} \overset{def}{=} \int_X f^+ \, d\delta_{x_0} - \int_X f^- \, d\delta_{x_0} \overset{(2)}{=} f^+(x_0) - f^-(x_0) = f(x_0).$$

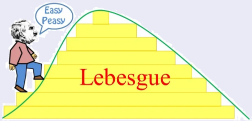
■

**Prz2. (Miara licząca)** Niech $(X, 2^X, \mu)$ przestrzeń z miarą liczącą, tzn. $\mu(A) = |A|$ dla $A \subseteq X$. Zauważmy, że $\mu = \sum_{x\in X} \delta_x$. Zatem $f : X \to \mathbb{R}$ jest całkowalna $\iff \sum_{x\in X} |f(x)| < \infty$ i wtedy

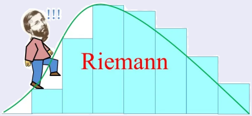
$$\int_X f\, d\mu = \sum_{x\in X} f(x)$$



**Prz3/Tw. (Miara Lebesgue'a)** Niech $\lambda$ będzie miarą Lebesgue'a na przedziale $[a, b]$. Każda funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ całkowalna w sensie Riemanna, jest całkowalna w sensie Lebesgue'a oraz




$$\int_{[a,b]} f\, d\lambda = \int_a^b f(x)\, dx$$




Ale np. $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$ nie jest całkowalna w sensie Riemanna, a jest całkowalna w sensie Lebesgue'a oraz $\int_{[a,b]} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}\, d\lambda = 0$.

I know of some universities where the Lebesgue integral is *taught* in the first year instead of the Riemann integral, but I know of no universities where students *learn* the Lebesgue integral in the first year.


Körner

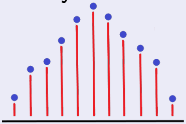
**Prz4. (Prawdopodobieństwo)** Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ przestrzeń probabilistyczna i niech $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ zmienna losowa. Wtedy

$$\xi \text{ jest } P\text{-całkowalna} \iff \xi \text{ posiada wartość oczekiwaną}$$

$$E(\xi) := \int_\Omega \xi \, dP \quad \text{wartość oczekiwana } \xi.$$

Jeśli $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ przeliczalna i $p_i = P(\{\omega_i\})$, to $P = \sum_i p_i \delta_{\omega_i}$
$\xi$ posiada wartość oczekiwaną $\iff \sum_i p_i |\xi(\omega_i)| < \infty$ i wtedy

$$E(\xi) = \sum_i \xi(\omega_i) p_i$$



**Tw.** Jeśli rozkład zmiennej losowej $\xi$, tzn. miara $\mu_\xi(A) := P(\xi^{-1}(A))$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, posiada **gęstość**, czyli $\lambda$-całkowalną funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taką, że $\mu_\xi(A) = \int_A f \, d\lambda$, dla $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, to

$$E(\xi) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) \, dx \qquad \text{(całka względem } \lambda)$$